Моделирование и анализ информационных систем. Т. 22, № 5 (2015), с. 665–681
Modeling and Analysis of Information Systems. Vol. 22, No 5 (2015), pp. 665–681

DOI: 10.18255/1818-1015-2015-5-665-681

УДК 517.9

Одномодовые и двухмодовые неоднородные диссипативные структуры в нелокальной модели эрозии

Ковалева А. М., Куликов Д.А.

получена 15 мая 2015

Рассмотрена периодическая краевая задача для одного нелинейного уравнения с отклоняющимся пространственным аргументом в случае, когда отклонение мало. Данное уравнение называют пространственно нелокальным уравнением эрозии. Оно описывает формирование волнообразного рельефа под воздействием ионной бомбардировки и может быть проинтерпретировано как развитие известной модели Бредли–Харпера. В работе показано, что неоднородный рельеф может появиться при смене устойчивости однородными состояниями равновесия. В данной краевой задаче потеря устойчивости может происходить на высоких модах. Номер такой моды зависит от многих факторов. Например, от угла падения потока. В работе также показано, что данная нелинейная краевая задача может быть включена в класс абстрактных параболических уравнений, разрешимость задачи для которых была изучена в работах П.Е. Соболевского и предполагает использование аналитической теории полугрупп линейных ограниченных операторов. Для решения возникающих бифуркационных задач были использованы методы исследования динамических систем с бесконечномерным фазовым пространством (пространством начальных условий), таких как: метод интегральных многообразий, нормальных форм Пуанкаре–Дюлака, а также асимптотические методы анализа. При этом разобраны обе задачи, возможные в данной ситуации: коразмерности один и коразмерности два. В частности, были получены асимптотические формулы для решений, которые описывают неоднородный волнообразный рельеф. Изучен вопрос об устойчивости данных решений. Приведен некоторый анализ нормальной формы. Приведены также асимптотические формулы для неоднородных волнообразных решений. В заключении статьи указаны некоторые возможные интерпретации результатов, которые получены в результате анализа данной краевой задачи.

Ключевые слова: нелокальное уравнение эрозии, периодическая краевая задача, устойчивость, бифуркации

Для цитирования: Ковалева А. М., Куликов Д.А., "Одномодовые и двухмодовые неоднородные диссипативные структуры в нелокальной модели эрозии", *Моделирование и анализ информационных систем*, **22**:5 (2015), 665–681.

Об авторах:
Ковалева Анастасия Михайловна, orcid.org/0000-0002-9863-0929, аспирант,
Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова,
ул. Советская, 14, г. Ярославль, 150000 Россия, e-mail: nyama55@yandex.ru

Куликов Дмитрий Анатольевич, orcid.org/0000-0002-6307-0941, канд. физ.-мат. наук, доцент
Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова,
ул. Советская, 14, г. Ярославль, 150000 Россия, e-mail: kulikov_d_a@mail.ru

Благодарности:
Работа выполнена при финансовой поддержке гранта Президента РФ (контракт МК-5932.2015.1), а также гранта РФФИ (контракт 14-01-31159 мол_а)

Введение

В работе рассматривается нелинейное дифференциальное уравнение с частными производными с отклоняющимся пространственным аргументом, которое моделирует процесс формирования нанорельефа при бомбардировке плоской поверхности мишени потоком ионов [1–3]. Этот технологический процесс имеет широкое применение в микроэлектронике (наноэлектронике). Математические модели, описывающие данный процесс, базируются на основополагающих идеях П. Зигмунда (см., например, [4]). В настоящее время более известной математической моделью следует считать уравнение Бредли–Харпера [5]. Основу последней модели составляет уравнение с частными производными, которое называют обобщенным уравнением Курамото–Сивашинского [6]. Отметим, что уравнение Курамото–Сивашинского широко известно в связи с приложениями в химической кинетике и гидродинамике. В работе [7], где изучалась модель Бредли–Харпера, был предложен один из возможных механизмов формирования наноструктур в результате потери устойчивости плоского состояния равновесия (СР). В данной работе продемонстрирована возможность реализации аналогичного механизма, но уже в рамках нелокальной модели эрозии.

1. Постановка математической задачи

Будем изучать следующее уравнение, которое приведено в перенормированном виде и носит название "нелокальное уравнение эрозии" (см., например, [1–3]):

$$u_t = au_{xx} - cw_x + u - w + b_1(u-w)w_x + b_2 w_x^2 + b_3(u-w)w_x^2, \tag{1.1}$$

где $u = u(t,x)$ – нормированное отклонение от плоского фронта мишени, $w = u(t, x-h), h \in R, h > 0$. Коэффициенты a, c, b_1, b_2, b_3 характеризуют условия, при которых происходит обработка мишени потоком ионов. Все они зависят от угла θ между направляющей потока ионов и нормалью к недеформированной поверхности. Наконец, $a, c > 0$, а знак остальных коэффициентов произволен.

Как и в работах [1–3, 5–7], уравнение (1.1) будем рассматривать вместе с периодическими краевыми условиями

$$u(t, x+2\pi) = u(t,x). \tag{1.2}$$

В качестве пространственного отклонения возьмем $h = \pi/4$. Выбор периодических краевых условий мотивирован прежде всего постановкой аналогичных задач для уравнения Бредли–Харпера [5–6]. С физической точки зрения такой выбор вполне объясним следующей причиной: все основные физические параметры на концах подложки (образца, находящегося под воздействием потока ионов) можно считать одинаковыми. Речь идет о силах, воздействующих на кромки, моментах сил и так далее. Период 2π выбран в результате перенормировок. Наконец, выбор $h = \pi/4$ обусловлен, конечно, менее глубокими причинами и предложен в качестве примера. В работе [1] указаны способы определения h. Еще раз уместно подчеркнуть, что $\pi/4$ предложен в качестве простейшего варианта, когда возможно, что будет показано ниже, появление одномодовых и двухмодовых структур. Последнее, отчасти, мотивирует причину, по которой имеет смысл традиционную модель Бредли–Харпера заменить на уравнение (1.1). Традиционный вариант постановок задач в модели Бредли–Харпера приводит, как правило, лишь к "одномодовым" решениям, и потеря устойчивости имеет место только на первой моде, то есть к выявлению длинноволнового рельефа. В задачах наноэлектроники предпочтителен рельеф с относительно малой длиной волны.

Далее рассмотрим вопрос, связанный с описанием структуры окрестности нулевого СР. Дополним краевую задачу (1.1), (1.2) начальным условием

$$u(0,x) = f(x). \tag{1.3}$$

Будем считать, что $f(x) \in Q_2(\delta)$ – достаточно малому шару гильбертова пространства H_2^2. Из работ [8, 9] вытекает, что смешанная краевая задача (1.1)–(1.3) локально корректно разрешима. Через H_2^2 обозначено пространство Соболева 2π периодических функций $f(x) \in L_2(0,2\pi)$, у которых существуют обобщенные производные $f'(x), f''(x) \in L_2(0,2\pi)$.

Отметим, что краевая задача (1.1)–(1.3), наряду с решением $u(t,x)$, допускает решение $u(t,x) + const$. Откуда следует, что данная краевая задача инвариантна относительно замены $u \to u + const$. С физической точки зрения данное свойство означает инвариантность уравнения относительно преобразований Галилея – одного из основных принципов классической физики. С математической точки зрения это дает относительную свободу в выборе системы координат. В частности, можно считать, что уравнение $u = 0$ задает невозмущенную поверхность до начала технологического процесса. Окрестность иных СР $u(t,x) = const$ в силу вышесказанного может быть заменена на окрестность нулевого СР. Ниже именно ее и будем иметь в виду.

2. Линейный анализ

Для исследования устойчивости нулевого решения рассмотрим вспомогательную краевую задачу, возникающую после линеаризации краевой задачи (1.1), (1.2) в окрестности нулевого СР. В результате получим следующую краевую задачу:

$$u_t = A(a,c)u, \quad u(t,x+2\pi) = u(t,x), \tag{2.1}$$

где $A(a,c)$ – линейный дифференциальный оператор (ЛДО), определенный на достаточно гладких 2π периодических функциях $v(x)$ равенством

$$A(a,c)v(x) = av'' - cv_h' + v - v_h, \quad v_h = v(x-h).$$

В силу полноты семейства функций $\exp(inx)$ в пространстве $L_2(0,2\pi)$ все его собственные значения (СЗ)

$$\lambda_n = \lambda_n(a,c) = \tau_n \pm i\sigma_n, \quad n = 0, \pm1, \pm2, ..., \tag{2.2}$$

где $\tau_n = -an^2 - cn\sin(nh) + 1 - \cos(nh)$, $\sigma_n = -cn\cos(nh) + \sin(nh)$. Откуда, в частности, вытекает, что а) $\lim \tau_n = -\infty$, при $|n| \to \infty$;

б) существует такая положительная постоянная M, что справедливо неравенство $|\sigma_n| \leq M|\tau_n|$ при $|n| \geq n_0, n_0 \in N$.

Данное свойство СЗ, а также полнота собственных функций (СФ) ЛДО $A(a, c)$, дают основание сформулировать утверждение (см., например, [8]).

Лемма 2.1. *ЛДО $A(a, c)$ является производящим оператором аналитической полугруппы линейных ограниченных операторов в пространстве 2π периодических и интегрируемых с квадратом на $(0, 2\pi)$ функций.*

Добавим, что вне зависимости от выбора h справедливо равенство $\lambda_0 = 0$. Расположение остальных точек спектра на комплексной плоскости изучим более подробно при специальном выборе отклонения $h (h = \pi/4)$. При таком выборе отклонения получаем уточнение формулы (2.2)

$$\tau_{\text{n}} = -an^2 - cn \sin\left(\frac{\pi}{4}n\right) + 1 - \cos\left(\frac{\pi}{4}n\right), \quad \sigma_n = -cn \cos\left(\frac{\pi}{4}n\right) + \sin\left(\frac{\pi}{4}n\right), n \neq 0. \quad (2.3)$$

Подчеркнем, что неравенство

$$Re\lambda_n \leq 0 \quad (2.4)$$

выполнено при всех n, если a достаточно велико. Напротив, при $a = 0$ (или очень малом) обязательно найдется такое $n = n_0$, при котором выполнено неравенство $Re\lambda_{n_0} > 0$. Выберем теперь такое максимальное $a = a_{\text{кр}} > 0$, при котором неравенство (2.4) выполнено при всех n, но уже при $a < a_{\text{кр}}$ реализуется противоположный вариант, то есть когда можно указать такой номер k, что $Re\lambda_k > 0$. Из этих рассуждений получаем, что величину $a_{\text{кр}} > 0$ можно и необходимо выбрать следующим образом:

$$a_{\text{кр}} = a_{\text{кр}}(c) = \max_{n \neq 0} b_n, \quad b_n = \frac{-cn \sin(\pi n/4) + 1 - \cos(\pi n/4)}{n^2},$$

если такой положительный максимум существует. Будем рассматривать лишь натуральные номера n, так как $b_{-n} = b_n$. Рассмотрим восемь подпоследовательностей последовательности b_m

$$b_m = b_n(k),$$

где $m = 8(n-1) + k, k = 0, 1, 2, ...7, n = 1, 2, ...$

Пусть $a_k = \max\limits_{n \in N} b_n(k)$. Тогда $a_{\text{кр}} = a_{\text{кр}}(c) = \max\{a_0, a_1, ..., a_7\}$. В результате громоздких, но не очень сложных вычислений удалось выделить 6 интервалов $I_j = (c_{j-1}, c_j), j = 1, \ldots, 6$, для которых справедливо равенство $a_{\text{кр}} = a_j$. Пусть ЛДО $A(a, c)$ при $a = a_j$ имеет СЗ

$$\lambda_0 = 0, \quad \lambda_j = i\sigma_j, \quad \overline{\lambda}_j = -i\sigma_j, \quad \sigma_j = -cj \cos\frac{\pi}{4}j + \sin\frac{\pi}{4}j.$$

Им отвечают СФ $e_0(x) = 1, e_j(x) = \exp(ijx), \overline{e}_j(x) = \exp(-ijx)$ соответственно. Остальные СЗ ЛДО $A(a, c) = A(a_j, c) = A(a_{\text{кр}}, c)$ лежат в полуплоскости комплексной плоскости, выделенной неравенством

$$Re\lambda_p \leq -\gamma < 0 \quad (p \neq 0, p \neq j), \quad (2.5)$$

где $\gamma = const > 0$. Такой критический случай будем называть критическим случаем первого типа (коразмерности 1), так как он реализуется за счет выбора одного параметра.

При $c = c_j > 0$ выполняется $a_j = a_{j+1}$, где $j = 1, 2, 3, 4, 5$. В этом случае ЛДО $A(a_j, c_j)$ имеет уже 5 СЗ, лежащих на мнимой оси. Для них справедливы равенства

$$\begin{gathered}\lambda_0 = 0,\ \ \lambda_j = i\sigma_j,\ \ \overline{\lambda}_j = -i\sigma_j,\ \ \sigma_j = -cj\cos(\pi j/4) + \sin(\pi j/4),\\ \lambda_{j+1} = i\sigma_{j+1},\ \ \overline{\lambda}_{j+1} = -i\sigma_{j+1},\\ \sigma_{j+1} = -c(j+1)\cos(\pi(j+1)/4) + \sin(\pi(j+1)/4),\end{gathered} \tag{2.6}$$

а соответствующие СФ, отвечающие СЗ, имеют следующий вид:

$$\begin{gathered}e_0(x) = 1,\ \ e_j(x) = \exp(ijx),\ \ \overline{e}_j(x) = \exp(-ijx),\\ e_{j+1}(x) = \exp(i(j+1)x),\ \ \overline{e}_{j+1}(x) = \exp(-i(j+1)x).\end{gathered} \tag{2.7}$$

Для остальных СЗ ЛДО $A(a, c)$, как и раньше, выполняется условие (2.5), где уже $p \neq 0, p \neq j, p \neq j+1$. Такой критический случай будем называть критическим случаем второго типа (коразмерности 2), так как он реализуется за счет выбора двух параметров. Сформулируем все вышесказанное, как в случае коразмерности 1, так и коразмерности 2, более детально в виде утверждений.

Лемма 2.2. *Пусть* $c \in (c_{j-1}, c_j)$, $j = 1, 2, 3, 4, 5, 6$, *где*

$$\begin{gathered}c_0 = 0,\ c_1 = (\sqrt{2}-1)/2 \approx 0.207,\ c_2 = (11-\sqrt{2})/42 \approx 0.228,\ c_3 = (8-\sqrt{2})/24 \approx 0.274,\\ c_4 = (17\sqrt{2}-8)/40 \approx 0.401,\ \ c_5 = (163+123\sqrt{2})/210 \approx 1.605,\ \ c_6 = \infty.\end{gathered}$$

Тогда $a_{\text{кр}} = a_j$, *где*

$$\begin{gathered}a_1 = (2-\sqrt{2}-c\sqrt{2})/2,\ \ a_2 = (1-2c)/4,\ \ a_3 = (2+\sqrt{2}-3\sqrt{2}c)/18,\\ a_4 = 1/8,\ \ a_5 = (5\sqrt{2}c+2+\sqrt{2})/50,\ \ a_6 = (1+6c)/36.\end{gathered}$$

Соответствующие СЗ и СФ ЛДО $A(a_j, c_j)$ *определяются по следующим формулам:*

$$\begin{gathered}e_j(x) = \exp(ijx),\ \ e_{-j}(x) = \exp(-ijx),\ \ \lambda_j = i\sigma_j,\\ \overline{\lambda}_j = -i\sigma_j,\ \ \sigma_j = -cj\cos(\pi j/4) + \sin(\pi j/4).\end{gathered}$$

Доказательство леммы базируется на анализе неравенств $a_j(c) < a_{j+1}(c)$ с последующим выбором $a_{\text{кр}}$. Подчеркнем, что справедливы неравенства

$$c_1 < c_2 < c_3 < c_4 < c_5,$$

проверка которых достаточно стандартна.

Лемма 2.3. *Пусть* $c = c_p$ $(p = 1, 2, 3, 4, 5)$. *Тогда* $a_{\text{кр}} = a_p = a_{p+1} = a_{p,p+1}$. *При этом оказалось, что*

$$a_{1,2} \approx 0.146,\ \ a_{2,3} \approx 0.136,\ \ a_{3,4} = 0.125,\ \ a_{4,5} = 0.125,\ \ a_{5,6} \approx 0.049.$$

Соответствующие СЗ и СФ ЛДО $A(a_{p,p+1}, c_p)$ *определяются по формулам (2.6), (2.7) при соответствующем выборе* $j = p$.

Ниже рассмотрим нелинейные краевые задачи в случаях, близких к отмеченным критическим.

3. Бифуркации пространственно неоднородных решений. Случай коразмерности 1

Пусть $c \in I_k$ и, следовательно, реализуется первый критический случай в задаче об устойчивости, т.е. $a_{\text{кр}} = a_k (k = 1, 2, 3, 4, 5, 6)$. Положим $a = a_k(1 - \varepsilon\beta), \beta = \pm 1, \varepsilon \in (0, \varepsilon_0), \varepsilon_0 \ll 1$. Тогда ЛДО $A_k(\varepsilon) = A(a_k(1 - \varepsilon\beta), c)$ имеет уже СЗ

$$\lambda_0 = 0, \quad \lambda_k(\varepsilon) = \tau_k(\varepsilon) + i\sigma_k(\varepsilon), \quad \overline{\lambda}_k(\varepsilon) = \tau_k(\varepsilon) - i\sigma_k(\varepsilon), \quad \tau_k(\varepsilon) = \varepsilon\beta a_k k^2, \quad \sigma_k(\varepsilon) = \sigma_k.$$

Далее будем использовать обозначения A_k $(A_k = A_k(0))$. При $\beta = 1$ и возрастании ε два СЗ переходят в правую полуплоскость, а при $\beta = -1$ имеет место противоположный вариант. Возникшая ситуация близка к условиям теоремы Андронова–Хопфа, но всегда существует СЗ $\lambda_0 = 0$. Следовательно, поведение решений краевой задачи при достаточно малых начальных условиях определяется поведением решений трехмерной системы дифференциальных уравнений на центральном инвариантном многообразии (см., например, [10, 11]). Поэтому далее для исследования бифуркаций в краевой задаче

$$\begin{gathered} u_t = A_k(\varepsilon)u + F_2(u) + F_3(u), \;\; F_2(u) = b_1(u - w)w_x + b_2 w_x^2, \\ F_3(u) = b_3(u - w)w_x^2, \end{gathered} \tag{3.1}$$

$$u(t, x + 2\pi) = u(t, x) \tag{3.2}$$

используем метод инвариантных многообразий в сочетании с методом нормальных форм (НФ). Как уже сказано выше, динамику решений определяет трехмерное устойчивое инвариантное многообразие $M_3(\varepsilon)$, а систему обыкновенных дифференциальных уравнений, принадлежащих $M_3(\varepsilon)$, называют НФ.

Для построения НФ на трехмерном инвариантном многообразии воспользуемся аналогом метода Крылова–Боголюбова. Подробное описание алгоритма построения НФ можно найти в работах [12–15]. Далее изложение будет следовать методике, изложенной в работах [7, 16, 17]. Решение краевой задачи (3.1), (3.2) будем искать в следующем виде:

$$u(t, x, \varepsilon) = \psi(s) + \varepsilon^{1/2}u_1(t, x, s) + \varepsilon u_2(t, x, s) + \varepsilon^{3/2}u_3(t, x, s) + O(\varepsilon^{3/2}), \tag{3.3}$$

где $s = \varepsilon t$, а достаточно гладкие по совокупности переменных функции u_1, u_2, u_3 обладают следующими свойствами:

1) они удовлетворяют краевым условиям (3.2);
2) по переменной t имеют период $2\pi/\sigma_k$;
3) при фиксированных t и s функции $u_j(t, x, s) \in H_2^2$;
4) для функций $u_j(t, x, s)$ $(j = 2, 3)$ справедливы равенства

$$\frac{\sigma_k}{(2\pi)^2} \int_0^{2\pi/\sigma_k} \int_0^{2\pi} u_j(t, x) dx dt = \frac{\sigma_k}{(2\pi)^2} \int_0^{2\pi/\sigma_k} \int_0^{2\pi} u_j(t, x) \exp(\pm ikx \pm i\sigma_k t) dx dt = 0.$$

Этот класс функций обозначим через W_{σ_k}.

Замечание: *напомним достаточно хорошо известный факт. Рассмотрим неоднородную краевую задачу*

$$v_t = A_k v + g(t,x), \quad v(t,x+2\pi) = v(t,x),$$

где $k = \overline{1,6}$, *а функция* $g(t,x)$ *имеет по переменной* t *период* $2\pi/\sigma_k$, *а по* $x - 2\pi$. *Тогда данная неоднородная краевая задача имеет* $2\pi/\sigma_k$ *-периодические решения по переменной* t, *если выполнены условия разрешимости*

$$\frac{\sigma_k}{(2\pi)^2} \int\limits_0^{2\pi/\sigma_k} \int\limits_0^{2\pi} g(t,x)dxdt = \frac{\sigma_k}{(2\pi)^2} \int\limits_0^{2\pi/\sigma_k} \int\limits_0^{2\pi} g(t,x)\exp(\pm ikx \pm i\sigma_k t)dxdt = 0.$$

Равенства

$$\frac{\sigma_k}{(2\pi)^2} \int\limits_0^{2\pi/\sigma_k} \int\limits_0^{2\pi} v(t,x)dxdt = \frac{\sigma_k}{(2\pi)^2} \int\limits_0^{2\pi/\sigma_k} \int\limits_0^{2\pi} v(t,x)\exp(\pm ikx \pm i\sigma_k t)dxdt = 0$$

выделяют одно подходящее решение.

Подстановка суммы (3.3) в краевую задачу (3.1), (3.2) ((1.1), (1.2)) с последующим приравниванием выражений при одинаковых степенях ε приводит к серии линейных краевых задач для определения u_1, u_2, u_3, в которых u_t обозначает частную производную функции $u(t,x,s)$ по t. Так для u_1 получаем краевую задачу

$$u_{1t} = A_k u_1, \tag{3.4}$$

$$u_1(t,x+2\pi,s) = u_1(t,x,s). \tag{3.5}$$

Краевая задача (3.4), (3.5) имеет решение

$$u_1(t,x,s) = z\exp(i\sigma_k t + ikx) + \overline{z}\exp(-i\sigma_k t - ikx),$$

где $z = z(s), \overline{z} = \overline{z}(s)$. При этом функции $z = z(s), \overline{z} = \overline{z}(s), \psi(s)$ удовлетворяют системе обыкновенных дифференциальных уравнений (НФ)

$$\psi' = g_0(\psi,z,\overline{z}) + G_0(\psi,z,\overline{z},\varepsilon), \quad z' = g_1(\psi,z,\overline{z}) + G_1(\psi,z,\overline{z},\varepsilon), \tag{3.6}$$

где g_0, g_1, G_0, G_1 – достаточно гладкие функции переменных $\psi, z, \overline{z}, \varepsilon$. Здесь и ниже штрихом обозначена производная по s. Кроме того,

$$G_0(\psi,z,\overline{z},0) = G_1(\psi,z,\overline{z},0) = 0.$$

Краевая задача (3.1), (3.2) инвариантна относительно замен $u \to u + \psi$. Поэтому правые части системы дифференциальных уравнений (3.6) не зависят от ψ. Выпишем главную часть системы (3.6)

$$\psi' = g_0(z,\overline{z}), \quad z' = g_1(z,\overline{z}). \tag{3.7}$$

К системе (3.7) (а также (3.6)) можно добавить третье уравнение, комплексно сопряженное ко второму.

Ниже излагается алгоритм для определения правых частей системы (3.7). Формула (3.3) определяет вид решений, принадлежащих трехмерному инвариантному многообразию (центральному многообразию).

Для функции u_2 получаем неоднородную краевую задачу

$$\psi'(s) + u_{2t} = A_k u_2 + b_1(u_1 - w_1)w_{1x} + b_2 w_{1x}^2, \tag{3.8}$$

$$u_2(t, x + 2\pi, s) = u_2(t, x, s), \tag{3.9}$$

где штрихом обозначена производная по s, а также использовалось следующее равенство для полной производной по t:

$$\frac{\partial}{\partial t}(u_j(t, x, \varepsilon t)) = \frac{\partial u_j}{\partial t} + \frac{\partial u_j}{\partial s}\varepsilon.$$

Напомним, что $w_j(t, x, s) = u_j(t, x - (\pi/4), s), j = 1, 2, 3$.

Из условий ее разрешимости в классе периодических функций по переменной t определяется правая часть первого уравнения НФ (3.7). После этого функцию u_2 следует искать в виде

$$u_2(t, x, s) = \xi_k z^2 \exp(2ikx + 2i\sigma_k t) + \overline{\xi}_k \overline{z}^2 \exp(-2ikx - 2i\sigma_k t), \tag{3.10}$$

частное решение краевой задачи (3.8),(3.9). Именно такой ее вид обеспечивает выполнение четвертого свойства при описании функций, принадлежащих W_{σ_k}.

Комплексные постоянные $\xi_k, \overline{\xi}_k$ определяются методом неопределенных коэффициентов после подстановки равенства (3.10) в краевую задачу (3.8), (3.9). Индекс k пробегает значения от 1 до 6 в зависимости от выбора интервала для c (см. лемму 2.2). Так, например,

$$\xi_2 = \frac{1}{1 - 6c + 10c^2}\big[(b_1(1 - 3c) + b_2(1 - 4c)) + i(2b_2c - b_1c - b_2)\big],$$
$$\xi_4 = \frac{1}{1 + 4c^2}\big[(2b_1c - 2b_2) + i(4b_2c - b_1)\big],$$
$$\xi_6 = \frac{3}{90c^2 + 36c + 1}\big[(3b_2(1 + 12c) - b_1(1 + 9c)) + i(b_1c + b_2(1 + 6c))\big].$$

Для остальных ξ_k формулы более громоздки, но легко восстанавливаемые.

Приравнивая коэффициенты уже при $\varepsilon^{3/2}$, получаем краевую задачу для определения u_3

$$\begin{gathered} u_{3t} = A_k u_3 + b_3 w_{1x}^2(u_1 - w_1) + 2b_2 w_{1x}w_{2x} + b_1[(u_1 - w_1)w_{2x} + \\ +(u_2 - w_2)w_{1x}] - (z' \exp(i\sigma_k + ikx) + \overline{z}' \exp(-i\sigma_k - ikx)), \end{gathered} \tag{3.11}$$

$$u_3(t, x + 2\pi, s) = u_2(t, x, s). \tag{3.12}$$

Из условий разрешимости краевой задачи (3.11),(3.12) определяем правую часть второго уравнения НФ (3.7).

В нашем случае приходим к системе дифференциальных уравнений

$$\psi' = q_k|z|^2, \quad z' = \gamma_k z + (d_k + ig_k)z|z|^2. \tag{3.13}$$

Здесь $k = \overline{1,6}$, а коэффициенты $q_k, \gamma_k, d_k, g_k \in R$ и определяются в процессе реализации алгоритма. Все они зависят от номера интервала для выбора c.

Для дальнейшего изучения системы (3.13) положим

$$z(s) = \rho(s)\exp(i\varphi(s)). \tag{3.14}$$

Замена (3.14) сводит НФ (3.13) к системе из трех действительных уравнений

$$\psi' = q_k\rho^2, \quad \varphi' = g_k\rho^2, \quad \rho' = \gamma_k\rho + d_k\rho^3. \tag{3.15}$$

Определяющую роль в системе (3.15) играет уравнение для амплитудной переменной ρ. Решение двух первых уравнений (3.15) восстанавливается после рассмотрения уравнения для ρ. Справедливо следующее утверждение.

Лемма 3.1. *Третье уравнение системы (3.15) имеет нетривиальное СР S_0, которое представимо в виде*

$$\rho(s) = \rho_0 = \sqrt{-\frac{\gamma_k}{d_k}}, \quad k = \overline{1,6},$$

если $\gamma_k d_k < 0$. Оно асимптотически устойчиво, если $d_k < 0(\gamma_k > 0)$. Если $d_k > 0(\gamma_k < 0)$, то СР ρ_0 неустойчиво.

На каждом интервале I_k были найдены величины q_k, γ_k и d_k. Именно знак d_k (ляпуновской величины) играет важную роль в задаче об устойчивости СР $S_0(\rho = \rho_0)$. Знак d_k зависит от нескольких факторов: конечно, от номера k интервала I_k для коэффициента c, от величины $a_{\text{КР}} = a_k$ на каждом выбранном интервале, от коэффициентов b_1, b_2, b_3.

Для коэффициентов γ_k, d_k третьего уравнения НФ (3.15) укажем явные формулы. Так, при $k = 2, 4, 6$ эти формулы достаточно просты.

При $k = 2$ получаем, что

$$\gamma_2 = 4\beta a_2, \quad d_2 = 4\frac{3b_3 + (b_1 + 4b_2)(b_2(2c-1) - b_1c)}{10c^2 - 6c + 1}.$$

При $k = 4$ оказалось, что

$$\gamma_4 = 16\beta a_4, \quad d_4 = 16\frac{2b_3 + 8b_2^2 + 2(4c-1)b_1b_2 - 2cb_1^2}{4c^2 + 1}.$$

Наконец, при $k = 6$ получаем, что

$$\gamma_6 = 36\beta a_6, \quad d_6 = 108\frac{b_3 + b_1^2c + b_1b_2(1-6c) - 12b_2^2(1+6c)}{90c^2 + 18c + 1}.$$

Если $k = 1, 3, 5$ эти формулы несколько сложнее. Введем вспомогательные параметры, положив

$$\eta_1 = \frac{B_1Q_1 + B_2Q_2}{Q_1^2 + Q_2^2}, \quad \eta_2 = \frac{B_2Q_1 - B_1Q_2}{Q_1^2 + Q_2^2}.$$

Ниже в формулах будут использованы эти обозначения.

При $k = 1$ находим, что $\gamma_1 = a_1\beta$, а

$$d_1 = 2b_1\eta_1 + \sqrt{2}b_1\eta_2 + 2\sqrt{2}b_2(\eta_1 + \eta_2) + b_3(4 - \sqrt{2})/2,$$

где в этом случае

$$B_1 = -b_1(2+\sqrt{2})/2, \quad B_2 = (\sqrt{2}b_1 + 2b_2)/2,$$
$$Q_1 = (3-2\sqrt{2}) + 2c(1-\sqrt{2}), \quad Q_2 = \sqrt{2} - 1 - \sqrt{2}c.$$

При $k = 3$ уже $\gamma_3 = 9a_3\beta$, а

$$d_3 = -3b_1(2\eta_1 + \sqrt{2}\eta_2) + 18\sqrt{2}b_2(\eta_2 - \eta_1) + 9b_3(4+\sqrt{2})/2.$$

В этом случае

$$B_1 = 3b_1(2+\sqrt{2})/2, \quad B_2 = -3(\sqrt{2}b_1 + 6b_2)/2,$$
$$Q_1 = (1+\sqrt{2})[(1+\sqrt{2})^2 - 6c], \quad Q_2 = 3\sqrt{2}c + \sqrt{2} + 1.$$

Последний случай возникает, когда $k = 5$. Тогда $\gamma_5 = 25\beta a_5$,

$$d_5 = 10b_1\eta_1 - 5\sqrt{2}b_1\eta_2 - 50\sqrt{2}b_2(\eta_1+\eta_2) + b_3(100 + 25\sqrt{2})/2.$$

$$B_1 = -5b_1(\sqrt{2}+2)/2, \quad B_2 = -5(\sqrt{2}b_1 - 10b_2)/2,$$
$$Q_1 = 10\sqrt{2}c + 2 + 2\sqrt{2}, \quad Q_2 = 10c + 5\sqrt{2}c - \sqrt{2}.$$

Следует отметить, анализируя по очереди выражения d_k, что они могут принимать любой знак. Случай $k = 6$ наиболее легкий в плане анализа и наглядности. Разберем более детально этот случай. Пусть c достаточно велико, откуда следует, что главную роль играет коэффициент b_3 и поэтому его знак и определяет знак d_6. Наоборот, если b_3 достаточно мал, то знак d_6 определяет второе слагаемое в правой части, числитель которого при всех $c > 1.6$ знакопеременная квадратичная форма. Аналогичные рассуждения можно провести и для d_2, d_4. Формулы для d_1, d_3, d_5 рекуррентные, и поэтому анализ их знака сложнее.

Из леммы 3.1, а также результатов работ [7, 12–17] вытекает утверждение, относящееся к краевой задаче (1.1), (1.2).

Теорема 3.1. *СР S_0 третьего уравнения НФ (3.15) (семейству соответствующих периодических решений $P_2(\varphi_0, \psi_0)$) соответствует двумерное интегральное многообразие, для решений на котором справедлива асимптотическая формула*

$$\begin{gathered} u(t,x,\varepsilon) = \psi(t,\varepsilon) + v(t,x,\varepsilon) + \psi_0, \quad \psi(t,\varepsilon) = (\delta_k\varepsilon + o(\varepsilon))t, \\ v(t,x,\varepsilon) = \varepsilon^{1/2}\rho_0[\exp(i(\sigma_k + \varepsilon\omega_k + o(\varepsilon))t + ikx + i\varphi_0) + \text{к.с.}] + \\ +\varepsilon\rho_0^2[\eta\exp(2i(\sigma_k + \varepsilon\omega_k + o(\varepsilon))t + 2ikx + 2i\varphi_0) + \text{к.с.}] + o(\varepsilon). \end{gathered} \tag{3.16}$$

Здесь $\varphi_0, \psi_0 \in R, \omega_k = g_k/\rho_0^2, \delta_k = q_k\rho_0^2$, где величина ρ_0 была определена из анализа третьего уравнения системы (3.15).

Решения двупараметрического семейства (3.16) наследуют устойчивость СР S_0 НФ (3.15).

4. Бифуркации пространственно неоднородных решений. Случай коразмерности 2

Напомним, что при $a_{\text{кр}} = a_k = a_{k+1}$ ($k = \overline{1,5}$) в задаче об устойчивости нулевого решения реализуется критический случай, когда спектру линеаризованной краевой задачи (2.1) принадлежат следующие СЗ, расположенные на мнимой оси комплексной плоскости:

$$\lambda_0 = 0, \quad \lambda_{\pm k} = \pm i\sigma_k, \quad \lambda_{\pm(k+1)} = \pm i\sigma_{k+1},$$

а остальные СЗ лежат в левой полуплоскости комплексной плоскости. Выделенным СЗ отвечают СФ

$$e_0(x) = 1, \quad e_{\pm k}(x) = \exp(\pm ikx), \quad e_{\pm(k+1)}(x) = \exp(\pm i(k+1)x).$$

Пусть выбраны c_k, $a_k(a_{k+1} = a_k$ при $c = c_k)$. Положим

$$a = a_k(1 - \beta_1\varepsilon), \quad c = c_k + \beta_2\varepsilon,$$

где ε – малый неотрицательный параметр, $\beta_1, \beta_2 \in R$. В результате получим следующую нелинейную краевую задачу:

$$u_t = A_{k,(k+1)}(\varepsilon)u + b_1(u-w)w_x + b_2 w_x^2 + b_3 w_x^2(u-w), \tag{4.1}$$

$$u(t, x+2\pi) = u(t,x), \tag{4.2}$$

где $A_{k,(k+1)}(\varepsilon) = a_k(1-\beta_1\varepsilon)u_{xx} - (c_k + \beta_2\varepsilon)w_x + u - w$, $w(t,x) = u(t, x-(\pi/4))$. Указанный ЛДО имеет СЗ

$$\begin{gathered}
\lambda_0 = 0, \quad \lambda_k(\varepsilon) = i\sigma_k + \varepsilon(\tau_k + i\omega_k), \quad \lambda_{-k}(\varepsilon) = \overline{\lambda}_k(\varepsilon),\\
\lambda_{k+1}(\varepsilon) = i\sigma_{k+1} + \varepsilon(\tau_{k+1} + i\omega_{k+1}), \quad \lambda_{-(k+1)}(\varepsilon) = \overline{\lambda}_{k+1}(\varepsilon),\\
\tau_k = a_k k^2\beta_1 - \beta_2 k\sin(\frac{\pi k}{4}), \quad \omega_k = \beta_2 k\cos(\frac{\pi k}{4}),\\
\tau_{k+1} = a_{k+1}(k+1)^2\beta_1 - \beta_2(k+1)\sin(\frac{\pi(k+1)}{4}), \quad \omega_{k+1} = \beta_2(k+1)\cos(\frac{\pi(k+1)}{4}).
\end{gathered}$$

Уместно отметить, что при выбранных вариантах возмущений a_k и c_k величины τ_k и τ_{k+1} могут принимать любое значение. Действительно, рассмотрим систему

$$\begin{gathered}
a_k k^2\beta_1 - k\beta_2\sin(\frac{\pi k}{4}) = \tau_k,\\
a_{k+1}(k+1)^2\beta_1 - (k+1)\beta_2\sin(\frac{\pi(k+1)}{4}) = \tau_{k+1},
\end{gathered}$$

которую проинтерпретируем как систему для определения β_1 и β_2. Она имеет решение при любых τ_k, τ_{k+1}, так как определитель этой системы отличен от нуля при всех рассматриваемых значениях k.

При таком варианте выбора коэффициентов (таких СЗ) следует, что краевая задача (1.1), (1.2) имеет пятимерное инвариантное многообразие $M_5(\varepsilon)$. Динамику решений на нем определяет система из пяти обыкновенных дифференциальных уравнений – НФ.

Решения на данном многообразии следует искать в виде аналогичном (3.3) (см. [7, 16, 17]), как и в предыдущем пункте, т.е. для случая коразмерности 1. Выражения для u_1 в нашем случае следует положить в виде

$$\begin{gathered}
u_1 = z_k\exp(i\sigma_k t + ikx) + \overline{z}_k\exp(-i\sigma_k t - ikx) +\\
+ z_{k+1}\exp(i\sigma_{k+1}t + i(k+1)x) + \overline{z}_{k+1}\exp(-i\sigma_{k+1}t - i(k+1)x),
\end{gathered}$$

где $z_k = z_k(s), z_{k+1} = z_{k+1}(s)$. Как и ранее, соответствующие краевые задачи на следующих шагах будут аналогичны краевым задачам (3.8), (3.9) и (3.11), (3.12).

В результате из условий разрешимости полученных краевых задач в выбранном классе функций приходим к НФ

$$\begin{gathered} \psi' = d_1|z_k|^2 + d_2|z_{k+1}|^2, \\ z_k' = (\tau_k + i\omega_k)z_k - [d_3|z_k|^2 + d_4|z_{k+1}|^2]z_k, \\ z_{k+1}' = (\tau_{k+1} + i\omega_{k+1})z_{k+1} - [d_5|z_k|^2 + d_6|z_{k+1}|^2]z_{k+1}. \end{gathered} \tag{4.3}$$

Следует отметить, что явные формулы для коэффициентов НФ (4.3) достаточно громоздки и поэтому ниже некоторые из них приведены в рекуррентном виде. Ниже везде $k = \overline{1,6}$.

Для действительных коэффициентов d_1, d_2 справедливы формулы

$$d_1 = 2[-b_1 k \sin(\frac{\pi k}{4}) + b_2 k^2], \quad d_2 = 2[-b_1(k+1)\sin(\frac{\pi(k+1)}{4}) + b_2(k+1)^2].$$

Для упрощения записи формул для комплексных коэффициентов d_3, d_4, d_5, d_6 НФ (4.3) введем некоторые обозначения. Пусть

$$\begin{gathered} p_k = \exp(-i\frac{\pi k}{4}), \quad p_{k+1} = \exp(-i\frac{\pi(k+1)}{4}), \quad q_k = Re\, p_k, \\ q_{k+1} = Re\, p_{k+1}, \quad \tau_k = Im\, p_k, \quad \tau_{k+1} = Im\, p_{k+1}. \end{gathered}$$

Тогда

$$\begin{gathered} d_3 = b_3 k^2(2 - p_k - p_k^2) + 4b_2 k^2 \eta_1 p_k + ib_1\eta_1 k(2p_k^2 - p_k - \overline{p}_k), \\ d_4 = 2b_3((k+1)(1-p_k) + 2p_k k(q_{k+1} - 1)) + 2b_2(k+1)p_k(\eta_4 + (2k+1)\eta_3) + \\ + ib_1((2k+1)(p_k p_{k+1} - p_k)\eta_3 - \eta_4(\overline{p}_{k+1} - 1)p_k + \\ + (p_k - \overline{p}_{k+1})(k+1)\eta_3 + (k+1)(p_{k+1} - p_k)\eta_4), \\ d_5 = 2b_3(k(1 - p_{k+1}) + 2(k+1)p_{k+1}(q_k - 1)) + 2b_2 k p_{k+1}((2k+1)\eta_3 - \overline{\eta}_4) + \\ + b_1 i((2k+1)(p_k p_{k+1} - p_{k+1})\eta_3 + \eta_4(\overline{p}_k - 1)p_{k+1} - \\ - k(p_{k+1} - \overline{p}_k)\eta_3 - \overline{\eta}_4(p_k - p_{k+1})), \\ d_6 = b_3(k+1)^2(2 - p_{k+1} - p_{k+1}^2) + 4b_2(k+1)^2 p_{k+1}^2 \eta_2 + \\ + ib_1(k+1)\eta_2(2p_{k+1}^2 - p_{k+1} - \overline{p}_{k+1}). \end{gathered}$$

Наконец,

$$\begin{gathered} \eta_1 = \frac{b_1 ik(p_k^2 - p_k) - b_2 k^2 p_k^2}{2i\sigma_k + a_k k^2 + c_k ikp_k - (1 - p_k)}, \\ \eta_2 = \frac{b_1 i(k+1)(p_{k+1}^2 - p_{k+1}) - b_2(k+1)^2 p_{k+1}^2}{2i\sigma_{k+1} + a_{k+1}(k+1)^2 + c_{k+1} i(k+1)p_{k+1} - (1 - p_{k+1})}, \\ \eta_3 = \frac{b_1 i((2k+1)p_k p_{k+1} - (k+1)p_{k+1} - kp_k) - 2b_2 k(k+1)p_k p_{k+1}}{i(\sigma_k + \sigma_{k+1}) + a_k(2k+1)^2 + ic_k(2k+1)p_k p_{k+1} - (1 - p_k p_{k+1})}, \\ \eta_4 = \frac{b_1 i((k+1)p_{k+1} - p_k\overline{p}_{k+1} - kp_k) + 2b_2 k(k+1)p_k\overline{p}_{k+1}}{i(\sigma_k - \sigma_{k+1}) + a_k - ic_k p_k\overline{p}_{k+1} - (1 - p_k\overline{p}_{k+1})}. \end{gathered}$$

Для записи последних формул использованы относительно универсальные обозначения. При конкретных k эти формулы могут быть записаны в более простой форме. Следует также отметить, что, например, $p_k p_{k+1} = \sqrt{2}(1+i)/2$ при любом k.

В общем виде анализ даже знаков $Re\, d_3, Re\, d_4, Re\, d_5, Re\, d_6$ затруднен. Численный анализ соответствующих формул показывает, что коэффициенты НФ (4.3) достаточно произвольны по знаку и абсолютной величине. В частности, потому, что зависят от коэффициентов b_1, b_2, b_3. В свою очередь, эти коэффициенты зависят от угла между направляющей пучка ионов и нормалью. Они изменяются в достаточно широких пределах [4]. Тем не менее, подчеркнем, что во многих случаях $b_3 < 0$.

Для анализа НФ (4.3), как и ранее, удобнее перейти к полярным координатам, положив

$$z_k = \rho_k \exp(i\varphi_k), \quad z_{k+1} = \rho_{k+1} \exp(i\varphi_{k+1}), \tag{4.4}$$

и перейдем уже к следующей НФ:

$$\psi' = d_1\rho_k^2 + d_2\rho_{k+1}^2, \tag{4.5}$$

$$\begin{aligned} \rho_k' &= \tau_k\rho_k + [Re\, d_3\rho_k^2 + Re\, d_4\rho_{k+1}^2]\rho_k, \\ \rho_{k+1}' &= \tau_{k+1}\rho_{k+1} + [Re\, d_5\rho_k^2 + Re\, d_6\rho_{k+1}^2]\rho_{k+1}, \end{aligned} \tag{4.6}$$

$$\begin{aligned} \varphi_k' &= \omega_k + [Im\ d_3\rho_k^2 + Im\ d_4\rho_{k+1}^2], \\ \varphi_{k+1}' &= \omega_{k+1} + [Im\ d_5\rho_k^2 + Im\ d_6\rho_{k+1}^2]. \end{aligned} \tag{4.7}$$

Центральную роль при исследовании играет замкнутая подсистема дифференциальных уравнений (4.6) для амплитудных переменных ρ_k, ρ_{k+1}. Пусть $\rho_{k,0}, \rho_{k+1,0}$ – координаты ненулевых СР. Возможны три вида таких СР

$$S_1 : \rho_{k,0} > 0, \rho_{k+1,0} = 0;\ S_2 : \rho_{k,0} = 0, \rho_{k+1,0} > 0;\ S_3 : \rho_{k,0} > 0, \rho_{k+1,0} > 0.$$

Вопрос об их устойчивости, решается с использованием теоремы об устойчивости по первому приближению. В нашем случае данный вопрос сводится к исследованию спектра матрицы Якоби.

Используя результаты работ [7, 12–17], можно утверждать, что справедлива следующая теорема для краевой задачи (4.1), (4.2) (краевой задачи (1.1), (1.2) при соответствующем выборе коэффициентов).

Теорема 4.1. *Существует такое $\varepsilon_0 > 0$, что при всех $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ каждому грубому ненулевому СР системы (4.6) (S_1, S_2, S_3) соответствует семейство решений краевой задачи (4.1), (4.2) следующего вида:*

$$u(t, x, \varepsilon) = ([d_1\rho_{k,0}^2 + d_2\rho_{k+1,0}^2]\varepsilon + o(\varepsilon))t + v(t, x, \varepsilon) + \psi_0, \tag{4.8}$$

где

$$\begin{gathered} v(t, x, \varepsilon) = [2\rho_{k,0}\cos(\sigma_k + \varepsilon\Theta_k + o(\varepsilon))t + ikx + \gamma_k + 2\rho_{k+1,0}\cos(\sigma_{k+1} + \varepsilon\Theta_{k+1} + o(\varepsilon))t + \\ + i(k+1)x + \gamma_{k+1}]\varepsilon^{1/2} + o(\varepsilon^{1/2}), \gamma_k, \gamma_{k+1}, \psi_0, \Theta_k, \Theta_{k+1} \in R. \end{gathered}$$

Решения (4.8) наследуют устойчивость СР S_1, S_2, S_3.

Отметим, что СР S_1, S_2 соответствуют решения, которые фактически были указаны в разделе 3, то есть периодические решения второго рода. Напомним, что, как это принято, периодическим решением второго рода называют такое решение, производная по t которого будет уже обычной периодической функцией переменного t. Иной вариант решений реализуется, если рассмотреть СР S_3. В этом случае СР S_3 системы (4.6) соответствуют пространственно неоднородные решения, у которых есть две составляющие: линейная функция от t и квазипериодическая функция переменного t. Такие решения принято называть квазипериодическими решениями второго рода.

5. Некоторые комментарии

В работе рассмотрены бифуркационные задачи, возникающие при изучении нелокального уравнения эрозии, дополненного периодическими краевыми условиями. Подчеркнем, что рассматриваемое уравнение входит в класс функционально-дифференциальных уравнений с отклоняющимся пространственным аргументом. В этот класс также входит уравнение

$$u_t + u = au_{xx} + K(1 + \gamma \cos u_h),$$

для которого также рассматривалась периодическая краевая задача, то есть

$$u(t, x + 2\pi) = u(t, x).$$

Здесь $a, K > 0, u_h = u(t, x+h)$. Эта краевая задача использовалась в качестве модели для описания динамики светового поля в световых резонаторах (см, например, [15]). Для нее изучалась задача о возбуждении колебаний при различных предположениях (см., например, [15, 18–21]).

Возвратимся к вопросам, которые были изучены в данной работе. В ней показано, что основной причиной возникновения волнового рельефа на поверхности мишени можно считать потерю устойчивости однородными СР. Аналогичный механизм возникновения волнового рельефа был отмечен в модели Бредли–Харпера [7]. Но в отличие от упомянутой модели, при рассмотрении нелокального уравнения эрозии может реализоваться вариант уже "двухмодовых" волновых структур.

Список литературы / References

[1] Рудый А. С., Бачурин В. И., "Пространственно нелокальная модель эрозии поверхности ионной бомбардировкой", *Известия РАН, серия физическая*, **72**:5 (2008), 624–629; English transl.: Rudyi A. S., Bachurin V. I., "Spatially nonlocal model of surface erosion by ion bombardment", *Bulletin of the Russian Academy of Sciences, Physics*, **72**:5 (2008), 586–591.

[2] Рудый А. С., Куликов А. Н., Метлицкая А. В., "Моделирование процессов формирования наноструктур при распылении ионной бомбардировкой", *Микроэлектроника*, **40**:2 (2011), 109–118; English transl.: Rudyi A. S., Kulikov A. N., Metlitskaya A. V., "Simulation of formation of nanostructures during sputtering of the surface by ion bombardment", *Russian Microelectronics*, **40**:2 (2011), 98–107.

[3] Рудый А. С., Куликов А. Н., Куликов Д. А., Метлицкая А. В., "Высокомодовые рельефы в рамках пространственно-нелокальной модели эрозии", *Микроэлектроника*, **43**:4 (2014), 282–288; English transl.: Rudyi A. S., Kulikov A. N., Kulikov D. A., Metlitskaya A. V., "High-mode wave reliefs in a spatially nonlocal erosion model", *Russian Microelectronics*, **43**:4 (2014), 277–283.

[4] Sigmund P., "A mechanism of surface micro-roughening by ion bombardment", *J. Mater. Sci*, **8** (1973), 1545–1553.

[5] Bradley R. M., Harper J. M. E., "Theory of ripple topography induced by ion bombardment", *J. Vac. Sci. Technol. A*, **6** (1988), 2390–2395.

[6] Кудряшов Н. А., Рябов П. Н., Стриханов М. Н., "Численное моделирование формирования наноструктур на поверхности плоских подложек при ионной бомбардировке", *Ядерная физика и инжиниринг*, **1**:2 (2010), 151–158; [Kudriashov N. A., Ryabov P. N., StrichanovM. N., "Chislennoe modelirovanie formirovania nanostructur na poverchnosti ploskich podlozhek pri ionnoy bombardirovke", *Yadernaya fizika i inginiring*, **1**:2 (2010), 151–158, (in Russian).]

[7] Куликов А. Н., Куликов Д. А., "Формирование волнообразных наноструктур на поверхности плоских подложек при ионной бомбардировке", *Журнал вычислительной математики и математической физики*, **52**:5 (2012), 930–945; English transl.: Kulikov A. N, Kulikov D. A, "Formation of wavy nanostructures on the surface of flat substrates by ion bombardment", *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, **52**:5 (2012), 800–814.

[8] Крейн С. Г., *Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве*, Наука, Москва, 1967; [Krein S. G., *Lineinye differentsialnye uravnenia v banakhovom prostranstve*, Nauka, Moscow, 1967, (in Russian).]

[9] Соболевский П. Е., "Об уравнениях параболического типа в банаховом пространстве", *Труды Московского математического общества*, **10** (1961), 297–350; [Sobolevskiy P. E., "Ob uravneniach parabolicheskogo tipa v banachovom prostranstve", *Trudy Mosk. matem. ob-va*, **10** (1961), 297–350, (in Russian).]

[10] Куликов А. Н., "О гладких инвариантных многообразиях полугруппы нелинейных операторов в банаховом пространстве", *Исследования по устойчивости и теории колебаний*, 1976, 114–129; [Kulikov A. N., "O gladkikh invariantnykh mnogoobraziyach nelineynich operatorov v banachovom prostranstve", *Issledovanie po ustoychivosti i teorii kolebaniy*, 1976, 114–129, (in Russian).]

[11] Марсден Дж., Мак-Кракен М., *Бифуркации рождения цикла и ее приложения*, Мир, Москва, 1980; English transl.: Marsden J. E., McCraken M., *The Hopf bifurcation and its applications*, Springer-Verlag, New York, Heidelberg, Berlin, 1976.

[12] Колесов А. Ю., Куликов А. Н., *Инвариантные торы нелинейных эволюционных уравнений*, Ярославль, 2003; [Kolesov A. Yu., Kulikov A.N., *Invariantnye tori nelineynich evolutsionnych uravneniy*, Yaroslavl, 2003, (in Russian).]

[13] Колесов А. Ю., Розов Н. Х., *Инвариантные торы нелинейных волновых уравнений*, Физматлит, Москва, 2004; [Kolesov A. Yu., Rozov N. Ch., *Invariantnye tori nelineynich volnovych uravneniy*, Fizmatlit, Moscow, 2004, (in Russian).]

[14] Глызин С. Д., Колесов А. Ю., *Локальные методы анализа динамических систем*, Ярославль, 2006; [Glyzin S.D. Kolesov A.Yu., *Lokalniye metody analiza dinamicheskich sistem*, Yaroslavl, 2006, (in Russian).]

[15] Мищенко Е.Ф. и др., *Автоволновые процессы в нелинейных средах с диффузией*, Физматлит, Москва, 2005; [Mischenko E.F. et al., *Avtovolnovye protsessy v nelineynich sredach c diffuziey*, Fizmatlit, Moscow, 2005, (in Russian).]

[16] Куликов А. Н., Куликов Д. А., "Локальные бифуркации плоских бегущих волн обобщенного кубического уравнения Шредингера", *Дифференциальные уравнения*, **40**:9 (2010), 1290–1299; English transl.: Kulikov A. N, Kulikov D. A, "Local bifurcations of plane running waves for the generalized cubic Schrodinger eqiation", *Differential equations*, **40**:9 (2010), 1299–1308.

[17] Куликов А. Н., Куликов Д. А., Рудый А. С., "Бифуркации наноструктур под воздействием ионной бомбардировки", *Вестник Удмуртского университета*, **4** (2011), 86–99; [Kulikov A. N., Kulikov D. A., Rudyi A. S., "Bifurcation of the nanostructures induced by ion bombardment", *Vestnik Udmurtskogo universiteta*, **4** (2011), 86–99, (in Russian).]

[18] Кащенко С. А., "Асимптотика пространственно-неоднородных структур в когерентных оптических системах", *Журнал вычислительной математики и математической физики*, **31**:3 (1991), 467–473; [Kashenko S.A., "Asimptotica prostranstvenno-neodnorodnych structur v kogerentnych opticheskich sistemach", *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, **31**:3 (1991), 467–473, (in Russian).]

[19] Белан Е. П., "Вращающиеся волны в параболической задаче с преобразованным аргументом", *Динамические системы*, **156** (2000), 160–167; [Belan E. P., "Vrachayuchiesya volny v parabolicheskoy zadache s preobrazovannym argumentom", *Dinamicheskie sistemy*, **156** (2000), 160–167, (in Russian).]

[20] Разгулин С. А., "Об автоколебаниях в нелинейной параболической задаче с преобразованным аргументом", *Журнал вычислительной математики и математической физики*, **33**:1 (1993), 68–80; [Razgulin S. A., "Ob avtokolebaniyach v nelineynich parabolicheskoy zadache s preobrazovannym argumentom", *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, **33**:1 (1993), 68–80, (in Russian).]

[21] Кащенко И. С., Кащенко С. А., "Быстро осциллирующие пространственно-неоднородные структуры в когерентных нелинейно-оптических системах", *Доклады Академии Наук*, **435**:1 (2010), 14–17; English transl.: Kashchenko I. S., Kashchenko S. A., "Rapidly oscillating spatially inhomogeneous structures in coherent nonlinear optical systems", *Doklady Mathematics*, **82**:3 (2010), 850–853.

DOI: 10.18255/1818-1015-2015-5-665-681

Single-Mode and Dual-Mode Nongomogeneous Dissipative Structures in the Nonlocal Model of Erosion

Kovaleva A. M., Kulikov D.A.

Received May 15, 2015

We consider a periodic boundary-value problem for a nonlinear equation with the deviating spatial argument in the case when the deviation is small. This equation is called a spatially nonlocal erosion equation. It describes the formation of undulating surface relief under the influence of ion bombardment and can be interpreted as a development of the well-known Bradley-Harper model. It is shown that the nonhomogeneous surface relief can occur when the stability of the homogeneous states of equilibrium changes. In this boundary value problem the loss of stability can occur at the higher modes and a number of such modes. The mode number depends on many factors. For example, it depends on the angle of incidence. It is also shown that the nonlinear boundary value problem can be included into the class of abstract parabolic equations. Solvability of this problem was studied in the works by P.E. Sobolevsky, and this method assumes to use the analytical theory of semigroups of bounded linear operators. In order to solve the occurring bifurcation problems there were used the investigation methods of dynamical systems with an infinite-dimensional phase space (a space of initial conditions) such as: the method of integral manifolds, the method of Poincare–Dulac normal forms and asymptotic methods of analysis. Both possible in the given situation problems were studied: in codimension one and in codimension two. In particular, asymptotic formulas were obtained for solutions which describe nonhomogeneous undulating surface relief. The question about the stability of these solutions was studied. And the analysis of normal form was given. Also the asymptotic formulas for the nonhomogeneous undulating solutions were obtained. In conclusion some possible interpretations of the obtained results are indicated.

Keywords: nonlocal model of erosion, periodic value boundary problem, stability, bifurcations

For citation: Kovaleva A. M., Kulikov D. A., "Single-Mode and Dual-Mode Nongomogeneous Dissipative Structures in the Nonlocal Model of Erosion", *Modeling and Analysis of Information Systems*, **22**:5 (2015), 665–681.

On the authors:
Kovaleva Anastasia Michailovna, orcid.org/0000-0002-9863-0929, post-graduate student,
P.G. Demidov Yaroslavl State University,
Sovetskaya str., 14, Yaroslavl, 150000, Russia, e-mail: nyama55@yandex.ru

Kulikov Dmitri Anatolievich, orcid.org/0000-0002-6307-0941, PhD, associate professor
P.G. Demidov Yaroslavl State University,
Sovetskaya str., 14, Yaroslavl, 150000, Russia, e-mail: kulikov_d_a@mail.ru

Acknowledgments:

This work was supported by the grant of the President of the Russian Federation (contract MK-5932.2015.1) and the grant RFFI (contract 14-01-31159 mol_a)